

**PENGENDALIAN KUALITAS PUPUK ZA I
MENGUNAKAN GRAFIK KENDALI MULTIVARIAT
HOTELLING T^2
(Studi Kasus PT. PETROKIMIA GRESIK)**

Nama Mahasiswa : Dika Virginia Devintasari
NRP : 1210100050
Program Studi : Strata-1
Jurusan : Matematika-FMIPA ITS
Dosen Pembimbing : 1. Dra. Nuri Wahyuningsih, M.Kes
2. Endah Rochmati, S.Si, MT

Abstrak

Pengendalian kualitas perlu dilakukan atas aktivitas proses yang dijalani untuk menjaga konsistensi kualitas produk serta jasa yang dihasilkan dan sesuai dengan ketentuan kebutuhan pasar. Grafik kendali multivariat Hotelling T^2 untuk pupuk ZA I produksi PT. PETROKIMIA GRESIK, diharapkan dapat mendeteksi adanya pergeseran proses statistik dan didapatkan standart proses secara statistik. Selanjutnya, dihitung indeks kemampuan proses untuk mengetahui apakah proses produksi yang berlangsung telah memenuhi spesifikasi yang ditentukan oleh perusahaan.

Kata Kunci—Grafik Kendali multivariat *Hotelling T^2* , Indeks Kemampuan Proses, Pengendalian Kualitas.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

**QUALITY CONTROL FERTILIZER ZA I USING
MULTIVARIATE CONTROL CHART HOTELLING T^2
(Case Study PT. PETROKIMIA GRESIK)**

Name of Student : Dika Virginia Devintasari
NRP : 1210100050
Study Program : Strata-1
Deartment : Mathematics
Suoervisor : 1. Dra. Nuri Wahyuningsih, M.Kes
2. Endah Rochmati, S.Si, MT

Abtract

Quality control need to be performed on the process undertaken to maintain the consistency of products quality, according to the provisions of the needs of the market. Multivariate control chart Hotelling T^2 , to control the quality of fertilizer ZA I at PT. PETROKIMIA GRESIK, used to improve the detection of mean changes in statistical process control and gets the standart value in statistical process. The next, calculated Index Capability Process to determine weather process production has met the specifications defined by the company.

**Keyword-Multivariate Control Chart Hotelling T^2 ,
Index Capability Process, Quality Control.**

“ Halaman ini sengaja dikosongkan ”

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, dijelaskan mengenai pengendalian kualitas serta langkah-langkah analisis multivariat, seperti korelasi, distribusi normal multivariat, yang selanjutnya akan diaplikasikan pada grafik kendali multivariat *Hotelling T²*.

1.1 Pengendalian Kualitas

Kualitas merupakan derajat/tingkatan dimana suatu produk mampu memuaskan keinginan konsumen. Pengendalian kualitas didefinisikan sebagai suatu sistem verifikasi dan penjagaan atau perawatan dari suatu tingkatan/derajat kualitas suatu produk yang dikehendaki dengan cara perencanaan yang seksama, pemakaian peralatan yang sesuai, inspeksi yang terus menerus serta tindakan korektif bilamana diperlukan[4].

Proses kontrol merupakan suatu kegiatan yang dilakukan untuk menjaga proses produksi pada suatu standart tertentu dengan menggunakan peralatan yang sesuai, pengawasan yang baik, dan kemudian melakukan tindakan korektif jika terjadi penyimpangan-penyimpangan. Dalam pengendalian kualitas mutu, pemeriksaan tidak hanya dapat dilakukan di awal proses produksi, melainkan dapat dilakukan pada saat proses produksi serta di akhir proses produksi. Dalam hal ini, pengendalian kualitas secara statistik merupakan alat yang dapat digunakan dalam pengontrolan proses pembuatan suatu produk[5]. Dalam pengendalian mutu/kualitas, faktor-faktor penyebab timbulnya keragaman antar variabel karakteristik tersebut dapat berupa peralatan, bahan, metode kerja, tenaga kerja, lingkungan, tenaga kerja, operator, dan lain-lain[3].

1.2 Analisis Multivariat

Analisis multivariat merupakan analisa statistik data yang terdiri dari banyak variabel dan antar variabel saling berkorelasi[7]. Multivariat merupakan perluasan dari distribusi

univariat normal sebagai aplikasi dari variabel-variabel yang saling berhubungan. Apabila data tersebut diperoleh dari hasil pengukuran lebih dari satu variabel karakteristik. Anggota sampel yang pengolahannya menggunakan memenuhi syarat-syarat analisis multivariat maka data dikatakan normal multivariat.

Asumsi-asumsi yang diberikan pada analisis multivariat adalah korelasi variabel karakteristik dan analisis distribusi normal multivariat, yang akan dijelaskan sebagai berikut:

1.2.1 Organisasi Data

Suatu pengamatan sebanyak n dengan p variabel, yang terdapat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1. Organisasi Data

Sample (i)	1	2	...	j	k	p
1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1j}	...	X_{1p}
2	X_{21}	X_{22}	...	X_{2j}	X_{2p}
...
i	X_{i1}	X_{i2}		X_{ij}		X_{ip}
...
n	X_{n1}	X_{n2}	...	X_{nj}		X_{np}
rata-rata	\bar{X}_1	\bar{X}_2	...	\bar{X}_j	...	\bar{X}_p
Nilai kovarian	S_1^2	S_2^2	...	S_j^2	...	S_p^2

2.2.2 Korelasi

Korelasi adalah suatu ukuran yang menyatakan kekuatan hubungan antara 2 variabel[3]. Perhitungan koefisien korelasi Pearson antara variabel X dan Y , diberikan [2]:

$$\begin{aligned}\rho_{X_j X_k} &= \frac{\sigma_{x_j x_k}}{\sqrt{\sigma_{x_j x_j} \sigma_{x_k x_k}}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N (X_{ij} - \bar{X}_j)(X_{ik} - \bar{X}_k)}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (X_{ij} - \bar{X}_j)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N (X_{ik} - \bar{X}_k)^2}} \quad ; -1 \leq \rho \leq 1\end{aligned}$$

Jika $\rho > 0$, maka terdapat korelasi antara 2 variabel dengan kecenderungan positif, sedangkan jika $\rho < 0$, maka terdapat korelasi antara 2 variabel dengan kecenderungan negatif dan apabila $\rho = 0$ maka tidak terdapat korelasi (saling bebas).

Jika terdapat variabel sebanyak p , maka didefinisikan matriks korelasi populasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\rho &= \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{x_1 x_1}}{\sqrt{\sigma_{x_1 x_1} \sqrt{\sigma_{x_1 x_1}}} & \frac{\sigma_{x_2 x_1}}{\sqrt{\sigma_{x_1 x_1} \sqrt{\sigma_{x_2 x_2}}} & \dots & \frac{\sigma_{x_1 x_p}}{\sqrt{\sigma_{x_1 x_1} \sqrt{\sigma_{x_p x_p}}} \\ \frac{\sigma_{x_1 x_2}}{\sqrt{\sigma_{x_1 x_1} \sqrt{\sigma_{x_2 x_2}}} & \frac{\sigma_{x_2 x_2}}{\sqrt{\sigma_{x_2 x_2} \sqrt{\sigma_{x_2 x_2}}} & \dots & \frac{\sigma_{x_2 x_p}}{\sqrt{\sigma_{x_2 x_2} \sqrt{\sigma_{x_p x_p}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{x_1 x_p}}{\sqrt{\sigma_{x_1 x_1} \sqrt{\sigma_{x_p x_p}}} & \dots & \dots & \frac{\sigma_{x_p x_p}}{\sqrt{\sigma_{x_p x_p} \sqrt{\sigma_{x_p x_p}}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p1} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

dengan:

$$\sigma_{X_j X_k} = \sum_{i=1}^N (X_{ij} - \bar{X}_j)(X_{ik} - \bar{X}_k)$$

$$\sigma_{X_j X_j} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)^2}$$

X_{ij} : amatan ke- i pada variabel ke- j

\bar{X}_j : rata-rata amatan untuk variabel ke- j

X_j : variabel ke- j

$\sigma_{X_j X_k}$: kovarian antara variabel ke- j dan ke- k

$\sigma_{X_j X_j}$: varian variabel ke- j

Untuk mengkaji koefisien korelasi sampel dari data hasil pengukuran, meskipun variabelnya memiliki satuan yang berbeda, diberikan oleh persamaan[3]:

$$r_{X_j X_k} = \frac{n \sum_{i=1}^n X_{ij} X_{ik} - \sum_{i=1}^n X_{ij} \sum_{i=1}^n X_{ik}}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n X_{ij}^2 - (\sum_{i=1}^n X_{ij})^2} \sqrt{n \sum_{i=1}^n X_{ik}^2 - (\sum_{i=1}^n X_{ik})^2}} \quad ; -1 \leq r \leq 1 \quad (2.1)$$

Jika $r > 0$, maka terdapat korelasi antara 2 variabel dengan kecenderungan positif, sedangkan jika $r < 0$, maka terdapat korelasi antara 2 variabel dengan kecenderungan negatif dan apabila $r = 0$ maka tidak terdapat korelasi (saling bebas).

Jika terdapat variabel sebanyak p , maka diperoleh matriks korelasi sampel sebagai berikut:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 & r_{x_1 x_2} & \dots & r_{x_1 x_p} \\ r_{x_2 x_1} & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ r_{x_p x_1} & r_{x_p x_2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Meskipun telah diperoleh nilai koefisien korelasi dari hasil perhitungan dengan persamaan 2.1, namun kebenaran (signifikansi) nilai tersebut perlu diuji secara statistik, dengan hipotesa sebagai berikut[2]:

Hipotesa :

$H_0: \rho = 0$ (tidak terdapat korelasi antar variabel)

$H_1: \rho \neq 0$ (terdapat korelasi antar variabel)

Statistik uji:

$$T = \frac{(n-1)}{(1-\bar{r})^2} [\sum \sum_{k < j} (r_{kj} - \bar{r})^2 - \hat{\gamma} \sum_{j=1}^p (\bar{r}_k - \bar{r})^2] \quad (2.2)$$

dengan:

$$\bar{r}_k = \frac{1}{p-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^p r_{kj} ; j = 1, 2, \dots, p \quad (2.3)$$

$$\bar{r} = \frac{2}{p(p-1)} \sum \sum_{k < j} r_{kj} \quad (2.4)$$

$$\hat{\gamma} = \frac{(p-1)^2 [1 - (1 - \bar{r})^2]}{p - (p-2)(1 - \bar{r})^2} \quad (2.5)$$

\bar{r}_j :rata-rata dari elemen yang bukan elemen diagonal utama pada kolom j pada matriks korelasi sampel.

\bar{r} :rata-rata keseluruhan dari elemen matriks segitiga bawah yang bukan diagonal utama pada matriks korelasi sampel.

r_{jk} :nilai koefisien korelasi $r_{x_j x_k}$ dimana $j \neq k$.

Kriteria Pengujian:

Jika statistik uji $T > X^2_{(p+1)(p-2)/2}(\alpha)$, maka H_0 ditolak, sehingga dapat disimpulkan bahwa terdapat korelasi yang signifikan antar variabel.

2.2.3 Distribusi Normal Multivariat

Untuk membuat grafik kendali multivariat *Hotelling* T^2 , data karakteristik kualitas harus berdistribusi normal multivariat.

Apabila dalam suatu pengamatan terdapat variabel sejumlah p dan $p \geq 2$ diberikan dengan (X_1, X_2, \dots, X_p) , dibentuk menjadi vektor $\mathbf{X}' = [X_1, X_2, \dots, X_p]$ dan $\boldsymbol{\mu}' = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]$ menjadi vektor rata-rata dari \mathbf{X}' dan kovarian matriks Σ , sehingga dapat diberikan nilai jarak kuadrat[1].

$$d_i^2 = (\mathbf{X}_{ij} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{X}_{ij} - \boldsymbol{\mu})$$

dengan :

$$\mathbf{X}_{ij} = \begin{bmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \\ \vdots \\ X_{Nj} \end{bmatrix}$$

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{2p} & \dots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E(X_1 - \mu_1)^2 & E(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2) & \dots & E(X_1 - \mu_1)(X_p - \mu_p) \\ E(X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1) & E(X_2 - \mu_2)^2 & \dots & E(X_2 - \mu_2)(X_p - \mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_p - \mu_p)(X_1 - \mu_1) & E(X_p - \mu_p)(X_2 - \mu_2) & \dots & E(X_p - \mu_p)^2 \end{bmatrix}$$

Terdapat 2 jenis uji normal multivariat, yaitu uji formal dan uji non-formal.

a. Uji Formal

Pada pengamatan normal multivariat, apabila populasi adalah multivariat, jika terdapat sampel sebanyak n , nilai n , dan $n-p$ adalah lebih banyak dari 25 atau 30, maka untuk setiap jarak $d_1^2, d_2^2, \dots, d_n^2$ merupakan variabel acak *chi-square*, hal tersebut dapat membantu untuk pengujian secara formal, yaitu dengan pengujian hipotesa distribusi normal multivariat sebagai berikut:

Hipotesa:

H_0 : Data berdistribusi normal multivariat

H_1 : Data tidak berdistribusi normal multivariat

Statistik Uji

$$d_{ij}^2 = (\mathbf{X}_{ij} - \bar{\mathbf{X}}_j)' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_{ij} - \bar{\mathbf{X}}_j); i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, p \quad (2.5)$$

dengan :

$$\mathbf{X}_{ij} = \begin{bmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \\ \vdots \\ X_{nj} \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_j = [\bar{X}_1 \quad \bar{X}_2 \quad \dots \quad \bar{X}_p]$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_1^2 & \bar{S}_{12}^2 & \dots & \bar{S}_{1p}^2 \\ \vdots & \bar{S}_2^2 & \dots & \bar{S}_{2p}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \bar{S}_p^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Var(X_1, X_1) & Cov(X_1, X_2) & \dots & Cov(X_1, X_p) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2, X_2) & \dots & Cov(X_2, X_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_p, X_1) & \dots & \dots & Var(X_p, X_p) \end{bmatrix}$$

$$Var(X_j, X_j) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)^2$$

$$Cov(X_j, X_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)(X_{ik} - \bar{X}_k)$$

\mathbf{S}^{-1} : invers matriks varian kovarian berukuran $p \times p$

d_i^2 : jarak tergeneralisasi yang dikuadratkan

X_{ij} : vektor pengamatan ke- i pada variabel ke- j

\bar{X}_j : vektor rata-rata pada variabel ke- j

\bar{X}_k : vektor rata-rata pada variabel ke- k

p : banyak variabel

n : banyak pengamatan/sampel

Kriteria Pengujian:

Jika terdapat lebih dari 50% jarak $d_i^2 \leq \chi_{(p, \alpha)}^2$ [2], maka H_0 diterima, sehingga dapat disimpulkan bahwa data berdistribusi normal multivariat.

b. Uji Non-Formal

Pada pengamatan normal multivariat, apabila populasi adalah multivariat, jika terdapat sampel sebanyak n , nilai n , dan $n-p$ adalah lebih banyak dari 25 atau 30, maka untuk setiap jarak $d_1^2, d_2^2, \dots, d_n^2$ merupakan variabel acak *chi-square*. Data akan berdistribusi normal multivariat jika plot mendekati garis lurus, sebaliknya, jika terdapat kelengkungan, maka menunjukkan penyimpangan dari normalitas. Adapun langkah-langkah dalam

pengujian distribusi normal multivariat dengan *chi-square plot*[2]:

1. Menghitung nilai vektor rata-rata \bar{X} dan nilai matriks varian kovarian S .
2. Menghitung jarak tergeneralisasi yang dikuadratkan atau biasa disebut dengan d_i^2 dengan perhitungan :

$$d_i^2 = (X_{ij} - \bar{X}_j)' S^{-1} (X_{ij} - \bar{X}_j); i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, p \quad (2.5)$$

dengan :

$$X_{ij} = \begin{bmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \\ \vdots \\ X_{nj} \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_j = [\bar{X}_1 \quad \bar{X}_2 \quad \dots \quad \bar{X}_p]$$

$$S = \begin{bmatrix} \bar{S}_1^2 & \bar{S}_{12}^2 & \dots & \bar{S}_{1p}^2 \\ \vdots & \bar{S}_2^2 & \dots & \bar{S}_{2p}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \bar{S}_p^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Var(X_1, X_1) & Cov(X_1, X_2) & \dots & Cov(X_1, X_p) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2, X_2) & \dots & Cov(X_2, X_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_n, X_p) & \dots & \dots & Var(X_p, X_p) \end{bmatrix}$$

$$Var(X_j, X_j) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)^2$$

$$Cov(X_j, X_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)(X_{ik} - \bar{X}_k)$$

S^{-1} : invers matriks varian kovarian berukuran $p \times p$

d_i^2 : jarak tergeneralisasi yang dikuadratkan

X_{ij} : vektor pengamatan ke- i pada variabel ke- j

\bar{X}_j : vektor rata-rata pada variabel ke- j

\bar{X}_k : vektor rata-rata pada variabel ke- k

p : banyak variabel

n : banyak pengamatan/sampel

3. Mengurutkan d_i^2 dari yang terkecil sampai terbesar untuk memperoleh kuantil terobservasi dari distribusi sebagai berikut

$$d_1^2 \leq d_2^2 \leq \dots \leq d_n^2$$
4. Menghitung $q_i = x_p^2 \left(\frac{n-i+1/2}{n} \right), i = 1, 2, 3, \dots, n$
5. Setelah menentukan semua nilai, langkah terakhir adalah membuat *scatter plot* antara d_i^2 dengan q_i .

2.3 Grafik Kendali Multivariat

Grafik kendali adalah teknik pengendalian proses pada jalur yang digunakan secara luas untuk menyelidiki dengan cepat terjadinya sebab-sebab terduga atau pergeseran proses sedemikian hingga penyelidikan terhadap proses dan tindakan perbaikan dapat dilakukan sebelum terlalu banyak unit yang tidak sesuai diproduksi[1]. Pada grafik kendali, terdapat batas kendali atas dan batas kendali bawah yang menyatakan suatu proses terkendali atau tidak. Grafik kendali merupakan alat yang sangat penting dalam proses pengendalian kualitas.

Grafik kendali multivariat merupakan peragaan grafik yang mewakili dua atau lebih dari dua variabel yang berhubungan atau berkorelasi[1]. Grafik kendali multivariat mengontrol variabel secara bersama-sama dengan mempertimbangkan adanya hubungan (korelasi) antara variabel, penggunaan grafik kendali ini juga terbatas pada data yang berdistribusi normal multivariat. Grafik kendali multivariat yang sering digunakan yaitu Hotelling T^2 [1]. Macam-macam grafik kendali yang digunakan adalah sebagai berikut:

1. Grafik Kendali *Generalized Variance*

Untuk mengetahui variabilitas dari suatu proses produksi, dapat digunakan peta kendali *Generalized Variance*. Variabilitas proses dapat dinyatakan dalam bentuk matriks varian-kovarian populasi (Σ) dengan matriksnya berukuran $p \times p$. Pada matriks

tersebut, diagonal utama adalah varian populasi dari variabel individu, dan diagonal yang lainnya adalah kovarian dari variabel individu. Khoo dan Quah pada tahun 2003, didasarkan selisih antar vektor pengamatan secara berturut-turut (*successive difference*) yang digunakan untuk menghitung nilai statistik, sebagai berikut:

$$M_i = \frac{1}{2}(\mathbf{X}_m - \mathbf{X}_{m-1})' \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{X}_m - \mathbf{X}_{m-1}); \quad (2.6)$$

$$m = 2, 3, 4, \dots n$$

Batas kontrol:

$$BKA = X_{p, \alpha/2}^2$$

$$BKB = X_{p, 1-\alpha/2}^2$$

dengan:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_1^2 & \bar{S}_{12}^2 & \dots & \bar{S}_{1p}^2 \\ \vdots & \bar{S}_2^2 & \dots & \bar{S}_{2p}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \bar{S}_p^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Var}(X_1, X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{Cov}(X_1, X_p) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2, X_2) & \dots & \text{Cov}(X_2, X_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_p, X_1) & \dots & \dots & \text{Cov}(X_p, X_p) \end{bmatrix}$$

p : jumlah karakteristik

M_i : statistik hitung peta kendali *Generalized Variance*

m : sampel berdasarkan perhitungan selisih antar vektor pengamatan secara berturut-turut (*successive difference*)

\mathbf{S}^{-1} : matriks varian kovarian

BKA : Batas Kendali Atas

BKB : Batas Kendali Bawah

Jika nilai statistik M_i jatuh diatas BKA atau jatuh dibawah BKB, maka dapat dinyatakan bahwa proses tidak terkontrol secara varians (*out of control*).

2. Grafik Peta Kendali *Hotelling T²*

Grafik kendali adalah suatu grafik yang menggambarkan karakteristik kualitas hasil dari produksi yang mempunyai batas kendali atas, garis tengah, dan batas kendali bawah. Produk dikatakan terkendali jika berada pada batas kendali atas dan batas kendali bawah, sebaran acak dan tidak membentuk *tren*[1].

Grafik Kendali *Hotelling T²* merupakan salah satu peta kendali yang diggunakan untuk data multivariat yang saling berhubungan antar variabel, serta merupakan *monitoring process* dan kontrol prosedur untuk data multivariat yang paling sering digunakan untuk mengontrol vektor *mean* pada proses[1]. Persamaan grafik kendali *Individual Hotelling T²* sebagai berikut:

$$T_i^2 = (\mathbf{X}_{ij} - \bar{\mathbf{X}}_j)' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_{ij} - \bar{\mathbf{X}}_j); i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, p \quad (2.7)$$

dengan:

$$\mathbf{X}_{ij} = \begin{bmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \\ \vdots \\ X_{nj} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{X}}_j = [\bar{X}_1 \quad \bar{X}_2 \quad \dots \quad \bar{X}_p]$$

\mathbf{X}_{ij} merupakan sampel vektor pengamatan ke i pada karakteristik ke j , sedangkan \mathbf{S} merupakan matriks kovarian sebagai berikut:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_1^2 & \bar{S}_{12}^2 & \dots & \bar{S}_{1p}^2 \\ \vdots & \bar{S}_2^2 & \dots & \bar{S}_{2p}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \bar{S}_p^2 \end{bmatrix}$$

Sebuah permasalahan yang signifikan dalam pengamatan individu adalah memperkirakan matriks populasi (Σ). Estimasi atau

perkiraan dari Σ adalah satu per dua dari kovarian matriks sampel, dimana pada tugas akhir ini, matriks kovarian menggunakan metode *successive different* (Holmes&Mergen, 1993).

$$S = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} V_i^T V_i, \text{ dengan } V_{ij} = X_{(1+i)j} - X_{ij}$$

dimana batas pengendali atas dan batas pengendali bawah sebagai berikut :

$$BKA = \left(\frac{p(n+1)(n-1)}{n^2 - np} \right) F_{\alpha, p, n-p}$$

$$BKB = 0$$

Apabila n sampel pengamatannya lebih dari 100, maka menggunakan batas kendali sebagai berikut :

$$BKA = \left(\frac{p(n-1)}{n-p} \right) F_{\alpha, p, n-p}$$

$$BKB = X_{\alpha}^2, p$$

T_i^2 : statistik hitung peta kendali *Hotelling* T^2

X_{ij} : sampel ke- i pada j karakteristik

\bar{X}_j : vektor rata-rata untuk tiap-tiap karakteristik mutu

n : ukuran sampel pengamatan yang terkendali secara *variance*

S^{-1} : matriks varian-kovarian dari p karakteristik mutu

P : banyak karakteristik (variabel)

BKA : Batas Kendali Atas

BKB : Batas Kendali Bawah

Saat pengendalian kualitas jika terdapat sinyal *out of control* maka perlu dilakukan identifikasi variabel yang menjadi penyebab proses tidak terkendali. Salah satu metode yang digunakan yaitu mendeteksi sinyal *out of control* dengan menguraikan statistik T^2 ke dalam komponen yang menunjukkan kontribusi pada variabel[1].

$$b_j = T_i^2 - T_{ij}^2$$

T_i^2 merupakan nilai statistik yang mengandung seluruh nilai variabel, sedangkan T_{ij}^2 untuk semua variabel proses tanpa variabel ke- j . Jika nilai $b_j > X_{(\alpha,1)}^2$, maka variabel ke- j tersebut adalah penyebab pengamatan yang *out of control*.

2.4 Analisis Kemampuan Proses

Kapabilitas proses menggambarkan suatu *performance* atau penampilan proses dalam menghasilkan produk, proses dikatakan *capable* jika[1]:

1. Proses terkendali

Terkendali jika semua titik berada diantara batas spesifikasi atas dan batas spesifikasi bawah dan bersifat *random*(acak).

2. Memenuhi spesifikasi.

Nilai pengamatan dekat dengan nilai target.

3. Presisi dan akurasi tinggi.

Presisi adalah tingkat kedekatan antara satu pengamatan dengan pengamatan lain, serta akurasi adalah kedekatan suatu pengamatan dengan nilai target.

Tujuan dari analisis kemampuan proses untuk menganalisa apakah suatu proses (yang telah terkendali secara statistik dan berdistribusi normal) sesuai dengan batas-batas spesifikasi yang telah diberikan.

Menurut S.Kotz dan L.Johnson (1993) Indeks Kemampuan Proses (C_p) multivariat adalah:

$$C_p = \frac{K}{X_{p,0.9973}^2} \left(\frac{(n-1)p}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

dengan:

$$s = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})' A^{-1} (X_i - \bar{X}) \quad (2.9)$$

$$A^{-1} = X_i' X_i \quad (2.10)$$

$$K = \sqrt{(\bar{X} - \varepsilon)' V_0^{-1} (\bar{X} - \varepsilon)} \quad (2.11)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (BSA + BSB) \quad (2.12)$$

$X^2_{p,0.9973}$: *chi-square* dengan p jumlah karakteristik terkendali

n : sampel pada pengamatan yang sudah terkendali

p : banyak karakteristik

V_0^{-1} : invers matrikss varian kovarian

BSA : Batas Spesifikasi Atas

BSB : Batas Apesifikasi Bawah

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini, akan dijelaskan mengenai sumber data, variabel penelitian, dan langkah-langkah analisis yang dilakukan.

3.1 Pengambilan Data

Tugas Akhir ini menggunakan data variabel bahan-bahan pupuk ZA I yang diproduksi oleh PT.PETROKIMIA Gresik dengan variabel X_1 adalah Nitrogen, variabel X_2 adalah kandungan Air, variabel X_3 adalah Kristal FA dan variabel X_4 adalah Kristal +30US. Pengambilan sampel dilakukan secara sekunder untuk data pada bulan Januari 2013-Maret 2013.

3.2 Variabel Penelitian

Variabel-variabel yang digunakan dalam tugas akhir ini adalah :

1. Variabel X_1

Variabel X_1 adalah Nitrogen (1 – 4% berat kering tanaman), sebagai penggerak utama proses pertumbuhan tanaman. Nitrogen didapatkan dari tanah dalam bentuk nitrat (NO_3^-) atau ammonium (NH_4^+). Peranan nitrogen bagi tumbuhan adalah membuat tanaman lebih hijau, segar, dan banyak mengandung zat hijau daun yang penting untuk fotosintesa, mempercepat pertumbuhan tanaman, dan menambah kandungan protein hasil panen. Beberapa contoh pupuk tunggal N adalah Amonium nitrat, Amonium sulfat (ZA), dan Urea.

2. Variabel X_2

Variabel X_2 adalah air, sebagai kandungan pada pupuk yang terdapat dalam bentuk Kristal pupuk yang mempengaruhi kualitas gumpalan pada pupuk dalam setiap ukuran satuan mesh.

3. Variabel X_3

Variabel X_3 adalah Kristal FA, yang merupakan kandungan *free acid* dari reaksi proses dan jumlahnya harus diminimalkan, karena akan mempengaruhi pertumbuhan tanaman.

4. Variabel X_4

Variabel X_4 adalah Kristal +30US, yang merupakan ukuran Kristal pupuk dalam satuan mesh 30, ukuran tersebut dapat didapatkan melalui pengayakan yang dimaksudkan untuk mengetahui persentase distribusi butiran pupuk ZA I terhadap ayakan mesh 30 (mesh menyatakan banyaknya jumlah lubang dalam satuan 1 inch²). Ukuran butir pupuk ini menjadi sangat penting karena mempengaruhi kelarutan pupuk tersebut dalam air.

Adapun batas spesifikasi yang telah ditetapkan oleh perusahaan untuk mengontrol kadar N total, kadar air, Kristal FA, dan Kristal +30US sebagai berikut:

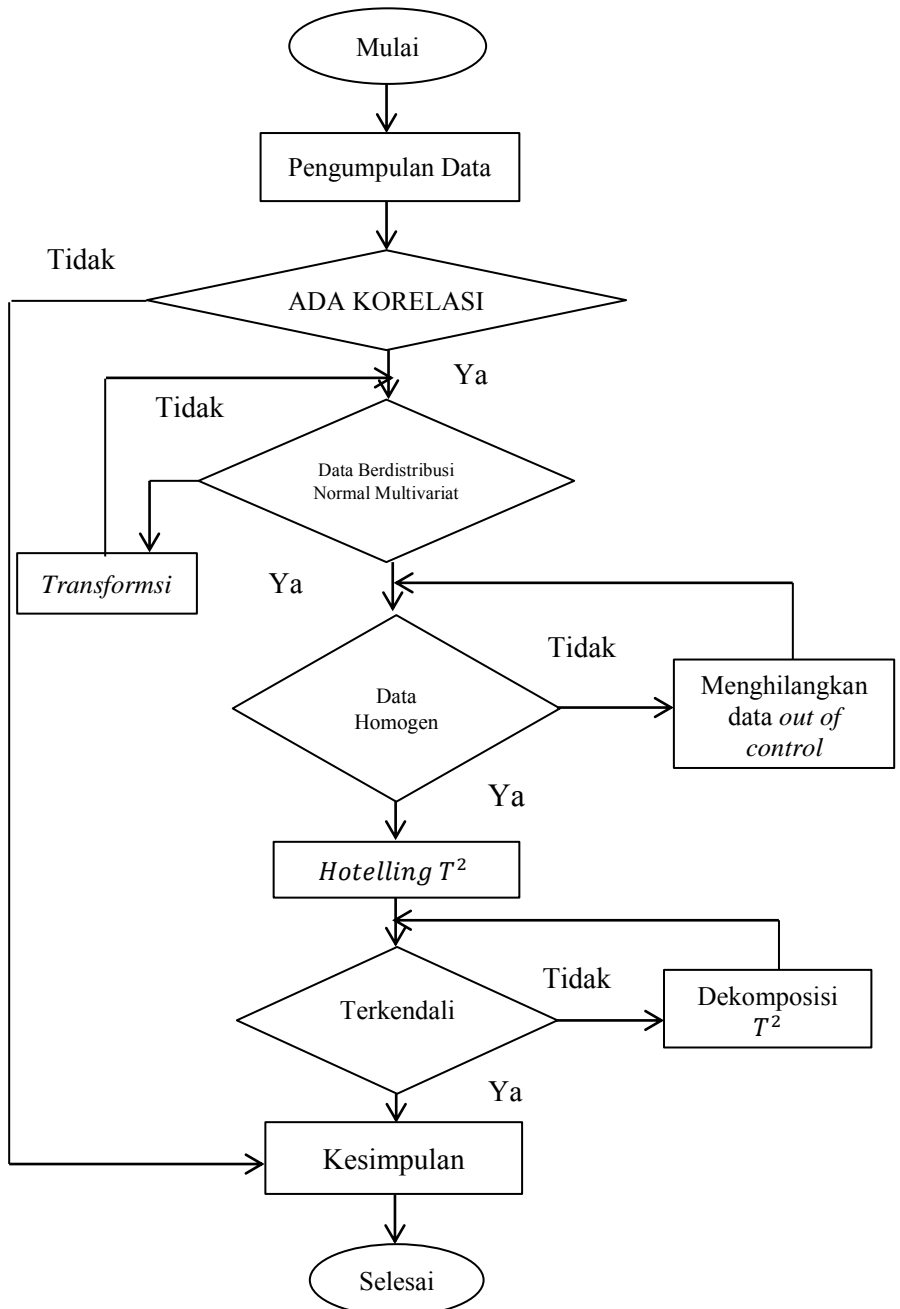
Tabel 3.1. Batas spesifikasi perusahaan

Variabel	Min	Max	Average	BAK	BKB
X_1	20.94	21.09	21.027	20.8	21.09
X_2	0.06	0.25	0.11	0	1
X_3	0.016	0.196	0.051456	0.09	0.01
X_4	51.97	81.77	68.66	55.7	77.3

3.3 Langkah Analisis

Langkah-langkah analisis yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Pengambilan data sekunder pada PT. PETROKIMIA Gresik yaitu berupa data kandungan pupuk ZA I, yaitu Kadar N, Air, Kristal FA, dan Kristal +30US.
2. Uji korelasi menggunakan Uji Korelasi Pearson untuk mengetahui besarnya korelasi antar variabel.
3. Uji Normal multivariat, untuk mengetahui data berdistribusi normal multivariat.
4. Mengidentifikasi variabilitas proses produksi menggunakan grafik kendali *General Variance*.



Gambar 3.1. Diagram alir langkah-langkah analisis

5. Mengidentifikasi proses produksi menggunakan grafik kendali *Hotelling T^2* , menggunakan data terkendali secara *Variance*.
6. Menentukan kapabilitas proses pada data terhadap variabel kadar N total, Air, Kristal FA, dan Kristal +30US apabila data telah terkendali melalui peta kendali *Hotelling T^2* .
7. Memberikan kesimpulan dari hasil analisis yang telah dikerjakan.
8. Publikasi hasil analisis.
Diagram alir langkah-langkah analisis dapat dilihat pada Gambar 3.1.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini, dijelaskan mengenai analisis statistika, uji korelasi, uji normal multivariat serta diberikan juga hasil dari grafik kendali multivariat *Hotelling T²*.

4.1 Pengambilan Data

Data pengamatan variabel X_1 , X_2 , X_3 , dan X_4 mulai tanggal 1 Januari 2013 sampai dengan 31 Maret 2013 diberikan pada Lampiran A1. Statistika deskriptif untuk data variabel X_1 , X_2 , X_3 , dan X_4 dapat dilihat pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1. Statistik Deskriptif Pupuk ZA I

Variabel	Min	Max	Mean	Median	Std.Deviasi
X_1	20.94	21.09	21.027	21.025	0.023507
X_2	0.06	0.25	0.11	0.105	0.026172
X_3	0.016	0.196	0.051456	0.05	0.025082
X_4	51.97	81.77	68.66	69.1	6.779529

4.2 Uji Korelasi

Dalam pengujian korelasi antara 2 variabel X_{ij} dan X_{ik} , digunakan koefisien korelasi sampel Pearson pada persamaan 2.1.

$$\begin{aligned}
 r_{X_1 X_2} &= \frac{(90)(210.0525) - (1892.42)(9.99)}{\sqrt{90(39791.75) - (3581253)}\sqrt{90(1.1075) - (99.8001)}} \\
 &= \frac{18904.73 - 18905.28}{\sqrt{4.4756}\sqrt{5.5449}} \\
 &= \frac{-0.5508}{(2.115561)(2.354761)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-0,5508}{4.981642} \\
&= -0.11057
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{X_2X_3} &= \frac{n \sum_{i=1}^n X_{i2}X_{i3} - \sum_{i=1}^n X_{i2} \sum_{i=1}^n X_{i3}}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n X_{i2}^2 - (\sum_{i=1}^n X_{i2})^2} \sqrt{n \sum_{i=1}^n X_{i3}^2 - (\sum_{i=1}^n X_{i3})^2}} \\
&= \frac{(90)(0,51929) - (9,99)(4,631)}{\sqrt{90(1.1705) - (99.8001)} \sqrt{(90)(0,94909) - (21.44616)}} \\
&= \frac{46.7361 - 46.26396}{\sqrt{2.354761} \sqrt{2.257354}} \\
&= \frac{0.47241}{5.31553} \\
&= 0.089
\end{aligned}$$

Untuk hasil koefisien korelasi lainnya, dapat dilihat pada matriks korelasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
r &= \begin{bmatrix} r_{X_1X_1} & r_{X_1X_2} & r_{X_1X_3} & r_{X_1X_4} \\ r_{X_2X_1} & r_{X_2X_2} & r_{X_2X_3} & r_{X_2X_4} \\ r_{X_3X_1} & r_{X_3X_2} & r_{X_3X_3} & r_{X_3X_4} \\ r_{X_4X_1} & r_{X_4X_2} & r_{X_4X_3} & r_{X_4X_4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -0.111 & 0.042 & 0.055 \\ -0.111 & 1 & 0.089 & -0.051 \\ 0.042 & 0.089 & 1 & 0.223 \\ 0.055 & -0.051 & 0.223 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil dari uji korelasi Pearson, bahwa terdapat beberapa variabel karakteristik tidak berkorelasi, seperti yang terjadi pada variabel X_1 dengan variabel X_2 , variabel X_1 dengan

variabel X_3 , variabel X_2 dengan variabel X_3 . Sedangkan, hubungan antara variabel X_1 dengan X_3 , dan X_3 dengan variabel X_4 bersifat *dependent* atau berkorelasi. Meskipun demikian, berdasarkan laporan dari PT. Petrokimia Gresik oleh Bapak Puguh Catur N, S.T selaku Staf Pemula Departemen Proses dan Pengelolaan Energi menyatakan bahwa dalam proses pembuatan pupuk ZA I, masing-masing variabel saling berhubungan, dan variabel yang memiliki korelasi terbesar dalam produksi pupuk ZA adalah variabel X_1 dengan variabel X_2 , didapatkan kesimpulan bahwa variabel-variabel tersebut tidak saling bebas (berkorelasi).

Untuk menguji signifikansi korelasi, diberikan hipotesa sebagai berikut[2]:

Hipotesa :

$H_0: \rho = 0$ (tidak terdapat korelasi antar variabel)

$H_1: \rho \neq 0$ (terdapat korelasi antar variabel)

Uji statistik (sesuai dengan persamaan 2.2):

$$\begin{aligned} T &= \frac{(90 - 1)}{(1 - 0.0417)^2} [0.067195 - (0.33973)(-0.0021)] \\ &= \frac{89}{0.918339} [0.067195 - 0.000713] \\ &= \frac{89}{0.918339} [0.066482] \\ &= 6.443044 \end{aligned}$$

dengan:

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 &= \frac{1}{3}(-0.111 + 0.042 + 0.055) \\ &= \frac{1}{3}(-0.014) \\ &= -0.0047 \end{aligned}$$

$$\bar{r}_2 = -0.0243; \bar{r}_3 = 0.118; \bar{r}_4 = 0.0757$$

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{2}{(4)(3)}(-0.111 + 0.042 + 0.055 + 0.089 + (-0.051) \\ &\quad + 0.223) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6} (0.247) \\
&= 0.0417 \\
\sum \sum_{k < j} (r_{kj} - \bar{r})^2 &= (-0.111 - 0.0417)^2 + (0.042 - 0.0417)^2 \\
&\quad + (0.055 - 0.0417)^2 + (0.089 - 0.0417)^2 \\
&\quad + (-0.051 - 0.0417)^2 + (0.223 - 0.0417)^2 \\
&= 0.023317 + 0.00000009 + 0.000177 \\
&\quad + 0.002237 + 0.008593 + 0.03287 \\
&= 0.067195 \\
\sum_{j=1}^p (\bar{r}_j - \bar{r})^2 &= (-0.0047 - 0.0417)^2 \\
&\quad + (-0.0243 - 0.0417)^2 \\
&\quad + (0.118 - 0.0417)^2 + (0.0757 - 0.0417)^2 \\
\hat{\gamma} &= \frac{3^2 [1 - (1 - 0.0417)^2]}{4 - 2(1 - 0.0417)^2} \\
&= \frac{9[1 - 0.918339]}{4 - 1.836678} \\
&= \frac{9(0.081661)}{2.16332} \\
&= 0.33973
\end{aligned}$$

Kriteria Pengujian:

Dengan menggunakan $\alpha=5\%$, $v=5$, $x_5^2(\alpha=0.05) = 11.07$, maka H_0 diterima, sehingga tidak ada korelasi yang signifikan antar variabel.

4.3 Uji Normal Multivariat

Untuk menguji distribusi normal multivariat, diberikan hipotesa sebagai berikut:

Hipotesa :

H_0 : Data berdistribusi normal multivariat

H_1 : Data tidak berdistribusi normal multivariat

Statistik Uji :

$$\begin{aligned}
 & d_1^2 \\
 & = [21.08 - 21.026 \quad 0.09 - 0.111 \quad 0.053 - 0.051 \quad 70.33 \\
 & - 68.663] \begin{bmatrix} 1818.929 & 184.314 & -73.498 & -0.250 \\ 184.314 & 1483.09 & -168.69 & 0.396 \\ -73.498 & -168.690 & 1675.69 & -1.399 \\ -0.2507 & 0.396 & -1.3990 & 0.022 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21.08 - 21.026 \\ 0.09 - 0.111 \\ 0.053 - 0.051 \\ 70.33 - 68.663 \end{bmatrix} \\
 & = [0.053 \quad 0.021 \quad 0.002 \quad 1.666] \begin{bmatrix} 1818.929 & 184.314 & -73.498 & -0.250 \\ 184.314 & 1483.09 & -168.69 & 0.396 \\ -73.498 & -168.690 & 1675.69 & -1.399 \\ -0.2507 & 0.396 & -1.3990 & 0.022 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} 0.053 \\ -0.021 \\ 0.002 \\ 1.666 \end{bmatrix} \\
 & = [92.203 \quad -20.956 \quad -0.106 \quad 0.014] \begin{bmatrix} 0.053 \\ -0.021 \\ 0.002 \\ 1.666 \end{bmatrix} \\
 & = 5.360593
 \end{aligned}$$

Hasil $d_2^2, d_3^2, \dots, d_{90}^2$ dapat dilihat pada Lampiran B3. Nilai $\chi_{(4,5\%)}^2 = 3.357$. Nilai $d_i^2 \leq 3.357$ adalah sebanyak 54 dari 90 nilai d_i^2 , sehingga terdapat 60% nilai $d_i^2 \leq 3.357$, jadi dapat disimpulkan bahwa H_0 diterima, dengan kata lain data dikatakan berdistribusi normal multivariat[2].

4.4 Grafik Kendali Multivariat

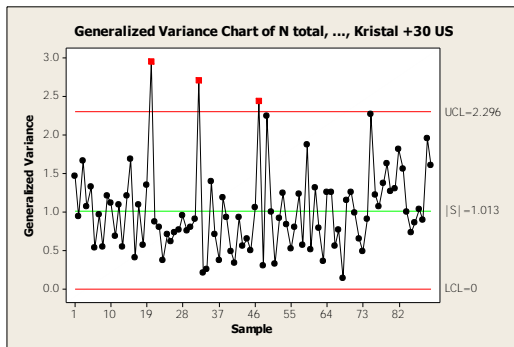
Variabel yang digunakan pada pupuk ZA I adalah X_1, X_2, X_3, X_4 yang selanjutnya dilakukan proses pengendalian kualitas melalui grafik kendali multivariat. Terdapat 2 grafik kendali yang akan digunakan yaitu grafik kendali *Generalized Variance* dan grafik kendali *Hotelling T²*.

4.4.1 Grafik kendali *Generalized Variance*

Grafik kendali *Generalized Variance* digunakan untuk melihat apakah variabilitas proses telah terkendali. Dengan menggunakan

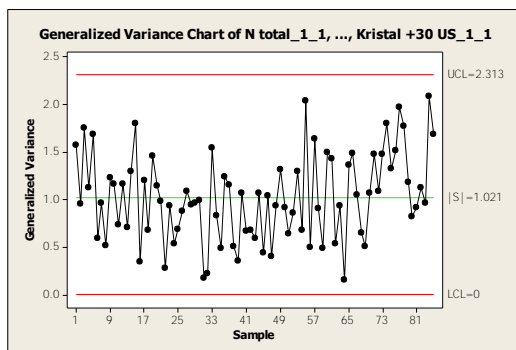
data Lampiran A1 dan persamaan (2.3), diperoleh hasil grafik kendali pada Gambar 4.2.

Gambar 4.2 menunjukkan terdapat 3 titik sampel yang berada pada luar batas kendali atas, yaitu pada sampel ke-20=2.950, 32=2.705, 47=2.444, karena terdapat 3 titik sampel berada diluar batas kendali, maka menghilangkan titik-titik sampel yang menyebabkan *out of control*, sehingga, hasilnya dapat dilihat pada Gambar 4.3.



Gambar 4.2. Grafik kendali *Generalized Variance* kondisi I

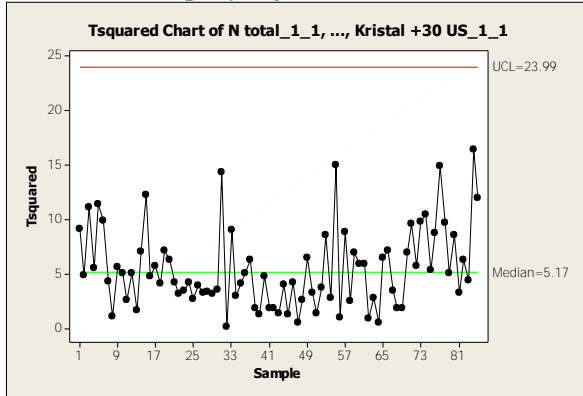
Pada Gambar 4.3 telah menunjukkan bahwa telah terkendali secara *variance*, dengan berada diantara BKA= 2.313 dan BKB=0.00



Gambar 4.3. grafik kendali *Generalized Variance* kondisi terkendali

4.4.2 Grafik Kendali *Hotelling T²*

Grafik kendali *Hotelling T²* digunakan untuk melihat apakah *mean* proses telah terkendali, dengan menggunakan data pada Lampiran A2 dan persamaan (2.4) diperoleh peta kendali menggunakan data sampel yang sudah terkendali secara *variance*.



Gambar 4.4. Grafik kendali *Hotelling T²* kondisi terkendali

Gambar 4.4 menunjukkan bahwa sampel telah berada diantara BKA=23.99 dan BKB=0, maka dapat dikatakan bahwa proses telah terkendali secara *mean*.

4.5 Indeks Kemampuan Proses

Setelah peta kendali *Hotelling T²* telah terkendali, selanjutnya dilakukan suatu analisis kemampuan proses pada proses produksi ZA I, sesuai dengan data yang sudah terkendali secara *variance* dan *mean*.

Berdasarkan persamaan (2.9), persamaan (2.10), persamaan (2.11), dan persamaan (2.12), maka diperoleh:

$$A = \begin{bmatrix} 37588.85 & 194.0958 & 87.75925 & 122516 \\ 194.0958 & 1.0415 & 0.45479 & 631.6566 \\ 87.75925 & 0.45479 & 0.238889 & 287.515 \\ 122516 & 631.6566 & 287.515 & 402911.6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.003941 & -0.1541 & -0.0204 & -0.0009422 \\ -0.154056 & 25.7278 & -1.5657 & 0.0076281 \\ -0.02041 & -1.5657 & 30.0448 & -0.0127817 \\ -0.000942 & 0.0076 & -0.0128 & 0.0002861 \end{bmatrix}$$

$$s = [0.0099273 + 0.0195 + 0.0826 + \dots + 0.0661] \\ = 3$$

$$\varepsilon_{X_1} = \frac{1}{2}(20.8 + 21.09) = 20.9; \varepsilon_{X_2} = 0.5; \varepsilon_{X_3} = 0.05; \varepsilon_{X_4} \\ = 66.5$$

K

$$= \sqrt{[\bar{x}_1 - \varepsilon_{X_1} \dots \bar{x}_4 - \varepsilon_{X_4}]' \begin{bmatrix} \bar{S}_1^2 & \bar{S}_{12}^2 & \dots & \bar{S}_{1p}^2 \\ \vdots & \bar{S}_2^2 & \dots & \bar{S}_{2p}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \bar{S}_p^2 \end{bmatrix}^{-1} [\bar{x}_1 - \varepsilon_{X_1} \dots \bar{x}_4 - \varepsilon_{X_4}]} \\ = \sqrt{357.058} \\ = 18.8960$$

Hasil C_p diperoleh dari persamaan (2.8).

$$C_p = \frac{18.8960}{16.1512} \left(\frac{(85 - 1)4}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \\ = 1.169944(112)^{\frac{1}{2}} \\ = (1.169944) (10.58301) \\ = 12.3053$$

Berdasarkan hasil C_p , dinyatakan *capable* karena nilai $C_p > 1$, yaitu sebesar 12.3053, hal ini menyatakan bahwa kemampuan proses produksi pupuk ZA I telah berada diantara batas spesifikasi atas dan batas spesifikasi bawah yang diberikan oleh perusahaan.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Hasil dari analisis menggunakan grafik kendali *Hotelling T^2* diketahui bahwa variabel Nitrogen, Air, Kristal FA dan Kristal +30US berada pada Batas Kendali Bawah dan Batas Kendali Atas, sehingga, dikatakan terkendali secara statistik.
2. Berdasarkan hasil analisis kabilitas proses secara multivariat, diperoleh hasil nilai C_p lebih dari 1, yaitu $C_p = 12.3053$ dan memiliki hasil nilai yang tinggi, sehingga dapat menerangkan bahwa proses *capable*.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil analisis, diberikan saran sebagai berikut:

1. Perusahaan menggunakan grafik kendali *Hotelling T^2* dalam pengendalian kualitas.
2. Dilakukan evaluasi kualitas setiap bulan, sehingga mengetahui apakah kualitas produksi naik atau turun.
3. Dilakukan analisis kemampuan proses secara berkala, sehingga dapat diketahui bahwa proses produksi pupuk ZA I tetap berada pada batas-batas kendali yang telah ditentukan perusahaan.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

LAMPIRAN

Lampiran A1 : Data awal variabel proses produksi pupuk ZA I

sampel	N	Air	Kristal FA	Kristal +30US
1	21.08	0.09	0.053	70.33
2	21.06	0.12	0.04	74.8
3	21.02	0.08	0.02	79.63
4	21.05	0.08	0.03	65.6
5	21.03	0.1	0.11	69.8
6	21.05	0.13	0.09	78.6
7	21.06	0.1	0.05	73.97
8	21.04	0.1	0.05	71.87
9	21.04	0.09	0.04	77.73
10	21.03	0.08	0.04	75.4
11	21.05	0.1	0.07	71.17
12	21.01	0.09	0.04	75.83
13	21.01	0.12	0.05	70.07
14	21.05	0.07	0.03	67.67
15	21.04	0.06	0.03	77.03
16	21.01	0.09	0.03	60.23
17	21	0.09	0.037	74.53
18	21	0.1	0.044	61.57
19	21	0.1	0.038	77.7
20	21.03	0.11	0.196	81.77
21	21.02	0.11	0.089	71.97
22	21.03	0.15	0.05	68.97
23	21.05	0.12	0.067	74.33

Lanjutan Lampiran A1

sampel	N	Air	Kristal FA	Kristal +30US
24	21.01	0.11	0.072	69.43
25	21.05	0.12	0.061	77.03
26	21.04	0.11	0.052	76.33
27	21.03	0.1	0.075	74.5
28	21.04	0.08	0.07	68.67
29	21.02	0.12	0.073	64.8
30	21.01	0.13	0.052	73.13
31	21.01	0.1	0.051	74.9
32	21.02	0.25	0.07	75.13
33	21.07	0.15	0.09	77.93
34	21.03	0.1	0.05	68.07
35	21.06	0.12	0.09	62.17
36	21.04	0.14	0.04	70.97
37	21	0.1	0.03	62.87
38	21.02	0.12	0.04	79.1
39	21.03	0.1	0.09	73.2
40	21.02	0.09	0.05	63.03
41	21.02	0.09	0.04	68.33
42	21	0.09	0.05	72.63
43	21.02	0.12	0.03	65.73
44	21.04	0.11	0.03	67.6
45	21.02	0.1	0.06	71.3
46	21.03	0.1	0.04	77.43
47	20.94	0.12	0.08	69.2
48	21.01	0.1	0.049	67.13
49	20.95	0.12	0.052	75.67

Lanjutan Lampiran A1

sampel	N	Air	Kristal FA	Kristal +30US
50	21.02	0.1	0.055	77.2
51	21.02	0.11	0.051	70.97
52	21.05	0.1	0.054	63.5
53	21.07	0.1	0.039	68.5
54	21.04	0.09	0.069	73.27
55	21.01	0.11	0.041	70.67
56	21.03	0.07	0.043	66.93
57	21.01	0.12	0.038	55.78
58	21.01	0.1	0.023	69.13
59	21.09	0.09	0.036	66.3
60	21.04	0.11	0.039	67
61	21.01	0.08	0.09	66.2
62	21.01	0.11	0.03	72.53
63	21.04	0.14	0.08	76.07
64	21	0.14	0.03	72.77
65	21	0.13	0.04	76.07
66	21.04	0.1	0.05	65.53
67	21.01	0.13	0.05	72.33
68	21.02	0.1	0.04	67.7
69	21.02	0.14	0.02	63.3
70	21.04	0.15	0.02	69.07
71	21.05	0.08	0.05	67.7
72	21.04	0.12	0.04	73.77
73	21.02	0.09	0.05	63.03
74	21	0.12	0.02	60.77
75	21.01	0.16	0.06	51.97
76	21.03	0.17	0.054	67.93

Lanjutan Lampiran A1

sampel	N	Air	Kristal FA	Kristal +30US
77	21.02	0.1	0.051	56.73
78	21.01	0.13	0.036	55.9
79	21.02	0.11	0.082	55.7
80	21.04	0.09	0.063	58.37
81	21.02	0.15	0.066	61.6
82	21.02	0.15	0.039	54.6
83	21.02	0.1	0.087	57.27
84	21.03	0.15	0.041	66.03
85	20.99	0.1	0.029	58.4
86	21.04	0.13	0.051	63.15
87	21.04	0.11	0.016	62.07
88	21.03	0.12	0.026	61.53
89	21.08	0.09	0.026	59.83
90	21.04	0.13	0.025	55.7

Lampiran A2 : Data terkendali variabel proses produksi pupuk ZA I

sampel	N total	Air	Kristal FA	Kristal +30 US
1	21.08	0.09	0.053	70.33
2	21.06	0.12	0.04	74.8
3	21.02	0.08	0.02	79.63
4	21.05	0.08	0.03	65.6
5	21.03	0.1	0.11	69.8
6	21.05	0.13	0.09	78.6
7	21.06	0.1	0.05	73.97
8	21.04	0.1	0.05	71.87
9	21.04	0.09	0.04	77.73
10	21.03	0.08	0.04	75.4
11	21.05	0.1	0.07	71.17
12	21.01	0.09	0.04	75.83
13	21.01	0.12	0.05	70.07
14	21.05	0.07	0.03	67.67
15	21.04	0.06	0.03	77.03
16	21.01	0.09	0.03	60.23
17	21	0.09	0.037	74.53
18	21	0.1	0.044	61.57
19	21	0.1	0.038	77.7
20	21.02	0.11	0.089	71.97
21	21.03	0.15	0.05	68.97
22	21.05	0.12	0.067	74.33
23	21.01	0.11	0.072	69.43
24	21.05	0.12	0.061	77.03
25	21.04	0.11	0.052	76.33

 Lanjutan Lampiran A2

sampel	N total	Air	Kristal FA	Kristal +30 US
26	21.03	0.1	0.075	74.5
27	21.04	0.08	0.07	68.67
28	21.02	0.12	0.073	64.8
29	21.01	0.13	0.052	73.13
30	21.01	0.1	0.051	74.9
31	21.07	0.15	0.09	77.93
32	21.03	0.1	0.05	68.07
33	21.06	0.12	0.09	62.17
34	21.04	0.14	0.04	70.97
35	21	0.1	0.03	62.87
36	21.02	0.12	0.04	79.1
37	21.03	0.1	0.09	73.2
38	21.02	0.09	0.05	63.03
39	21.02	0.09	0.04	68.33
40	21	0.09	0.05	72.63
41	21.02	0.12	0.03	65.73
42	21.04	0.11	0.03	67.6
43	21.02	0.1	0.06	71.3
44	21.03	0.1	0.04	77.43
45	21.01	0.1	0.049	67.13
46	21.02	0.1	0.055	77.2
47	21.02	0.11	0.051	70.97
48	21.05	0.1	0.054	63.5
49	21.07	0.1	0.039	68.5
50	21.04	0.09	0.069	73.27
51	21.01	0.11	0.041	70.67

 Lanjutan Lampiran A2

sampel	N total	Air	Kristal FA	Kristal +30 US
52	21.03	0.07	0.043	66.93
53	21.01	0.12	0.038	55.78
54	21.01	0.1	0.023	69.13
55	21.09	0.09	0.036	66.3
56	21.04	0.11	0.039	67
57	21.01	0.08	0.09	66.2
58	21.01	0.11	0.03	72.53
59	21.04	0.14	0.08	76.07
60	21	0.14	0.03	72.77
61	21	0.13	0.04	76.07
62	21.04	0.1	0.05	65.53
63	21.01	0.13	0.05	72.33
64	21.02	0.1	0.04	67.7
65	21.02	0.14	0.02	63.3
66	21.04	0.15	0.02	69.07
67	21.05	0.08	0.05	67.7
68	21.04	0.12	0.04	73.77
69	21.02	0.09	0.05	63.03
70	21	0.12	0.02	60.77
71	21.03	0.17	0.054	67.93
72	21.02	0.1	0.051	56.73
73	21.01	0.13	0.036	55.9
74	21.02	0.11	0.082	55.7
75	21.04	0.09	0.063	58.37
76	21.02	0.15	0.066	61.6
77	21.02	0.15	0.039	54.6

Lanjutan Lampiran A2

sampel	N total	Air	Kristal FA	Kristal +30 US
78	21.02	0.1	0.087	57.27
79	21.03	0.15	0.041	66.03
80	20.99	0.1	0.029	58.4
81	21.04	0.13	0.051	63.15
82	21.04	0.11	0.016	62.07
83	21.03	0.12	0.026	61.53
84	21.08	0.09	0.026	59.83
85	21.04	0.13	0.025	55.7

Lampiran B1 : Macro Minitab Normal Multivariat

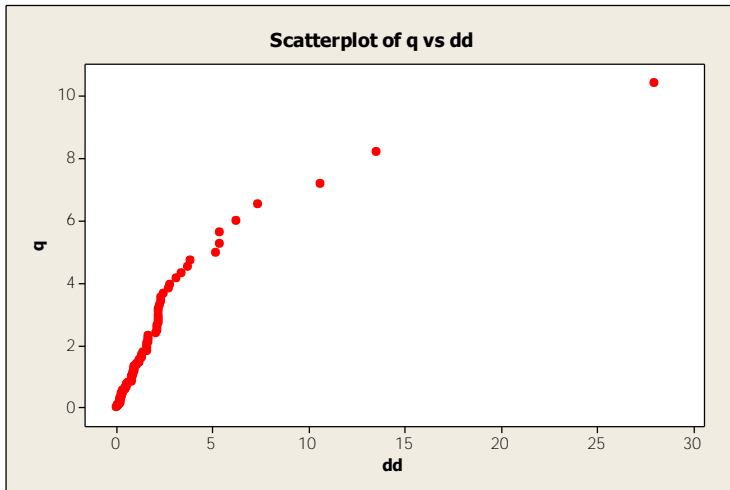
```

macro
qq x.1-x.p
mconstant i n p t chis
mcolumn d x.1-x.p dd pi q ss tt
mmatrix s sinv ma mb mc md
let n=count(x.1)
cova x.1-x.p s
invert s sinv
do i=1:p
let x.i=x.i-mean(x.i)
enddo
do i=1:n
copy x.1-x.p ma;
use i.
transpose ma mb
multiply ma sinv mc
multiply mc mb md
copy md tt
let t=tt(1)
let d(i)=t
enddo
    set pi
    1:n
    end
    let pi=(pi-0.5)/n
    sort d dd
    invcdf pi q;
    chis p.
    plot q*dd
    invcdf 0.5 chis;
    chis p.
    let ss=dd<chis
    let t=sum(ss)/n
    print t

```

```
if t>=0.5
note distribusi data multinormal
endif
if t<0.5
```

Lampiran B2 : Hasil Pengujian Normal Multivariat



Data Display

t 0.600000

distribusi data multinormal

Lampiran B3 : Nilai d_i^2 hasil pengujian normal multivariat

Sampel	d_i^2		Sampel	d_i^2	
1	5.3635	$>X_{(p,\alpha)}^2$	25	2.5943	$<X_{(p,\alpha)}^2$
2	3.5308	$>X_{(p,\alpha)}^2$	26	1.5806	$<X_{(p,\alpha)}^2$
3	6.3621	$>X_{(p,\alpha)}^2$	27	1.5212	$<X_{(p,\alpha)}^2$
4	2.8932	$<X_{(p,\alpha)}^2$	28	2.3217	$<X_{(p,\alpha)}^2$
5	5.9462	$>X_{(p,\alpha)}^2$	29	1.4496	$<X_{(p,\alpha)}^2$
6	4.9925	$>X_{(p,\alpha)}^2$	30	1.4878	$<X_{(p,\alpha)}^2$
7	2.5745	$<X_{(p,\alpha)}^2$	31	1.6573	$<X_{(p,\alpha)}^2$
8	0.6385	$<X_{(p,\alpha)}^2$	32	29.4542	$>X_{(p,\alpha)}^2$
9	2.98	$<X_{(p,\alpha)}^2$	33	9.0364	$>X_{(p,\alpha)}^2$
10	2.5866	$<X_{(p,\alpha)}^2$	34	0.1949	$<X_{(p,\alpha)}^2$
11	1.6022	$<X_{(p,\alpha)}^2$	35	6.1332	$>X_{(p,\alpha)}^2$
12	2.7558	$<X_{(p,\alpha)}^2$	36	2.2856	$<X_{(p,\alpha)}^2$
13	0.6604	$<X_{(p,\alpha)}^2$	37	2.6003	$<X_{(p,\alpha)}^2$
14	3.6692	$>X_{(p,\alpha)}^2$	38	3.3548	$<X_{(p,\alpha)}^2$
15	6.0712	$>X_{(p,\alpha)}^2$	39	2.7308	$<X_{(p,\alpha)}^2$
16	3.0528	$<X_{(p,\alpha)}^2$	40	1.5597	$<X_{(p,\alpha)}^2$
17	3.3714	$>X_{(p,\alpha)}^2$	41	0.9167	$<X_{(p,\alpha)}^2$
18	2.6047	$<X_{(p,\alpha)}^2$	42	2.5267	$<X_{(p,\alpha)}^2$
19	4.0495	$>X_{(p,\alpha)}^2$	43	0.987	$<X_{(p,\alpha)}^2$
20	33.5721	$>X_{(p,\alpha)}^2$	44	1.0839	$<X_{(p,\alpha)}^2$
21	2.4118	$<X_{(p,\alpha)}^2$	45	0.5376	$<X_{(p,\alpha)}^2$
22	2.3526	$<X_{(p,\alpha)}^2$	46	2.3098	$<X_{(p,\alpha)}^2$
23	1.9334	$<X_{(p,\alpha)}^2$	47	15.1999	$>X_{(p,\alpha)}^2$
24	1.2662	$<X_{(p,\alpha)}^2$	48	0.8049	$<X_{(p,\alpha)}^2$

Lanjutan Lampiran B3

Sampel	d_i^2		Sampel	d_i^2	
49	12.0571	$>X_{(p,\alpha)}^2$	74	3.5383	$>X_{(p,\alpha)}^2$
50	1.863	$<X_{(p,\alpha)}^2$	75	9.7388	$>X_{(p,\alpha)}^2$
51	0.2205	$<X_{(p,\alpha)}^2$	76	5.1887	$>X_{(p,\alpha)}^2$
52	1.8191	$<X_{(p,\alpha)}^2$	77	3.5885	$>X_{(p,\alpha)}^2$
53	3.6787	$>X_{(p,\alpha)}^2$	78	4.2582	$>X_{(p,\alpha)}^2$
54	1.622	$<X_{(p,\alpha)}^2$	79	6.5983	$>X_{(p,\alpha)}^2$
55	0.8465	$<X_{(p,\alpha)}^2$	80	4.1353	$>X_{(p,\alpha)}^2$
56	2.5559	$<X_{(p,\alpha)}^2$	81	3.6025	$>X_{(p,\alpha)}^2$
57	3.9914	$>X_{(p,\alpha)}^2$	82	6.1886	$>X_{(p,\alpha)}^2$
58	1.9892	$<X_{(p,\alpha)}^2$	83	6.7292	$>X_{(p,\alpha)}^2$
59	7.9865	$>X_{(p,\alpha)}^2$	84	2.6459	$<X_{(p,\alpha)}^2$
60	0.6062	$<X_{(p,\alpha)}^2$	85	5.1002	$>X_{(p,\alpha)}^2$
61	5.5649	$>X_{(p,\alpha)}^2$	86	1.5829	$<X_{(p,\alpha)}^2$
62	1.8404	$<X_{(p,\alpha)}^2$	87	2.8558	$<X_{(p,\alpha)}^2$
63	3.5102	$>X_{(p,\alpha)}^2$	88	1.9339	$<X_{(p,\alpha)}^2$
64	3.9532	$>X_{(p,\alpha)}^2$	89	8.001	$>X_{(p,\alpha)}^2$
65	3.6109	$>X_{(p,\alpha)}^2$	90	5.0928	$>X_{(p,\alpha)}^2$
66	0.6992	$<X_{(p,\alpha)}^2$			
67	1.3533	$<X_{(p,\alpha)}^2$			
68	0.4547	$<X_{(p,\alpha)}^2$			
69	3.2342	$<X_{(p,\alpha)}^2$			
70	4.935	$>X_{(p,\alpha)}^2$			
71	2.1787	$<X_{(p,\alpha)}^2$			
72	1.5134	$<X_{(p,\alpha)}^2$			
73	1.5597	$<X_{(p,\alpha)}^2$			

Lampiran C1 : Macro Minitab Kapabilitas Proses

```

macro
cova x.1-x.p
mconstant n i t1 t2 c.1-c.p k2 k chi cp sbaru
mcolumn x.1-x.p b.1-b.p vek.1-vek.85 cm1 sbr
mmatrix am1 am2 am3 ainv am5 am6 mm mtt mvek mvekt s
cm2 cm3 cm4 vo voin
noecho
let n=count(x.1)
define 0 1 1 s
print s
do i=1:p
let b.i=x.i-mean(x.i)
enddo
    copy x.1-x.p am1
    cova x.1-x.p vo
    print vo
    inve vo voin
    print voin
    trans am1 am2
    mult am2 am1 am3
    inve am3 ainv
    print ainv
    copy b.1-b.p mm
    trans mm mtt
    copy mtt vek.1-vek.85
    do i=1:n
    copy vek.i mvek
    trans mvek mvekt
    mult mvekt ainv am5
    mult am5 mvek am6
  
```

```

add s am6 s
print i s
enddo
print s
copy s sbr
print sbr
copy sbr sbaru
print sbaru
let t1=20.9 ..... (BSA+BSB)/2
let t2=0.5 ..... (BSA+BSB)/2
let t3= (BSA+BSB)/2
let t4= (BSA+BSB)/2
let c.1=mean(x.1)-t1
let c.2=mean(x.2)-t2
let c.3=mean(x.3)-t3
let c.4=mean(x.4)-t4
print c.1-c.4
copy c.1-c.4 cm1
print cm1
trans cm1 cm2
trans cm2 cm3
print cm2
print cm3
mult cm2 voin cm4
print cm4
mult cm4 cm3 k2
print k2
let k=sqrt(k2)
print k
invcdf 0.9973 chi;
chis p.
print chi
let cp=(k/chi)*sqrt((n-1)*p/sbaru)
print cp
endmacro

```

Lampiran C2 : Hasil Kapabilitas Proses Secara Multivariat**Data Display** $k^2 = 357.058$ **Data Display** $K = 18.8960$ **Data Display** $\chi^2 = 16.1512$ **Data Display** $cp = 12.3053$